Instituto de Matemática
Campus Curicó
28/05/2018

Prueba Nº2
Cálculo III

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1+\dfrac{Puntos}{10}$. **Duración** = 60 minutos

---

1) [**20 ptos**] Sea $\mathcal{R}$ la región encerrada por la intersección de las curvas $x^2 + y^2 = 3y$ y $x^2 + y^2 = \sqrt{3}x$. Se pide:

   a) [**6 pts**] Hacer un esbozo **ordenado y claro** de la región de integración $\mathcal{R}$. *Poner especial cuidado en este item, pues los dos siguientes dependen de éste.*

   b) [**7 pts**] Escribir, **sin calcular**, la integral que permite calcular el área de $\mathcal{R}$, en el orden de integración $\underline{dydx}$.

   c) [**7 pts**] Escribir, **sin calcular**, la integral que permite calcular el área de $\mathcal{R}$, usando coordenadas polares.

2) [**20 ptos**] Usando cambios de variable adecuados, **calcular** la integral $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \frac{y}{x} e^{xy}\, dA$

   Donde $\mathcal{R}$ es la región en el primer cuadrante acotada por las curvas $y = \dfrac{x}{2}$, $y = 2x$, $y = \dfrac{1}{x}$ y $y = \dfrac{4}{x}$

3) [**20 ptos**] Sea $\mathcal{S}$ el sólido, en el primer octante, limitado por las superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \quad \text{(esfera)} \qquad\qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x \quad \text{(esfera)}$$

   Expresar, **sin calcular**, el volumen de $\mathcal{S}$, por medio de una integral triple, usando coordenadas:

   a) [**10 ptos**] Rectangulares en el orden $dzdydx$.

   b) [**10 ptos**] Esféricas en el orden $d\rho d\theta d\phi$.

Pauta :

1) *a)*

- $x^2+y^2=3y \Longleftrightarrow x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$, centro $C=\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ y radio $r=\dfrac{3}{2}$.

[1 pto]

....

- $x^2+y^2=\sqrt{3}x \Longleftrightarrow x^2-\sqrt{3}x+y^2=0 \Longleftrightarrow \left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{3}{4}$ centro $C=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ y radio $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

[1 pto]

....

- Encontremos los puntos de intersección:

  Note que $3y=\sqrt{3}x \Longrightarrow y=\dfrac{\sqrt{3}x}{3}$. Reemplazando en la ecuación $x^2+y^2=\sqrt{3}x$, se obtiene:

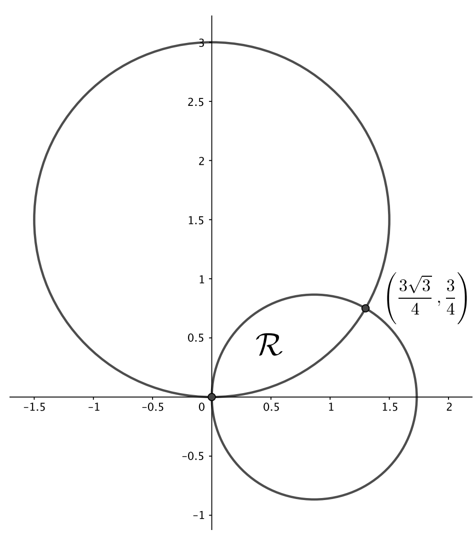
$$x^2+\left(\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)^2=\sqrt{3}x \Longleftrightarrow \frac{4}{3}x^2-\sqrt{3}x=0 \Longrightarrow x=0 \ \vee \ x=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

  Luego, los puntos de intersección son: $(0,0)$ y $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4},\dfrac{3}{4}\right)$

[2 pts]

....

Luego, la gráfica esta dada por:



[2 pts] (Buena o mala)

....

$b)$ $A(\mathcal{R}) = \displaystyle\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} \int_{\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}-x^2}}^{\alpha(x)} 1\, dydx,$ donde $\alpha(x) = \sqrt{\dfrac{3}{4} - \left(x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

[3+4 pts] (Límtes 1^{ra} y 2^{da} integral)
(Buena o mala para cada integral)

. . . .

$c)$ Note que, las circunferencias en coordenadas polares y el ángulo quedan:

- $x^2 + y^2 = 3y \Longleftrightarrow r^2 = 3r\sin(\theta) \Longrightarrow r = 0 \vee r = 3\sin(\theta)$
- $x^2 + y^2 = \sqrt{3}x \Longleftrightarrow r^2 = \sqrt{3}r\cos(\theta) \Longrightarrow r = 0 \vee r = \sqrt{3}\cos(\theta)$
- Basta con obtener $\tan(\theta) = \dfrac{2/3}{2\sqrt{3}/3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$

[3 pts] (Buena o mala)

. . . .

Así $A(\mathcal{R})$ en coordendas polares queda:

$$A(\mathcal{R}) = \int_0^{\pi/6} \int_0^{3\sin(\theta)} r dr d\theta + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{3}\cos(\theta)} r dr d\theta$$

[1+1+1+1 pts] (Límtes 1^{er} y 2^{do} sumando para cada integral)
(Buena o mala para cada integral)

. . . .

2)

- Haciendo $u = xy$ y $v = \dfrac{y}{x}$, se deduce que $y = \sqrt{uv}$ y $x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}$ **[4 pts]**
- $\mathcal{R}^* = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq u \leq 4\,;\, \dfrac{1}{2} \leq v \leq 2\right\}$ **[4 pts]**
- El jacobiano está dado por $J = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \dfrac{1}{2v}$ **[5 pts]**
- $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \frac{y}{x} e^{xy}\, dA = \int_1^4 \int_{1/2}^2 ve^u \cdot \frac{1}{2v}\, dvdu$ (solo expresar la integral) **[2 pts]**
- $\displaystyle\int_1^4 \int_{1/2}^2 ve^u \cdot \frac{1}{2v}\, dvdu = \frac{1}{2}\int_1^4 \int_{1/2}^2 e^u\, dvdu = \frac{3}{4}\int_1^4 e^u\, du = \frac{3}{4} \cdot (e^4 - e)$ **[5 pts]**

(sino calculan la integral se decuentan los **[5 pts]**)

3) $a)$ $V(\mathcal{S}) = \displaystyle\int_0^{1/2}\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}}\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2-y^2}} 1\,dzdydx + \int_{1/2}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1\,dzdydx$

[5 pts] (Cada sumando)

(Dos límites de integración erróneos de cada sumando $=$ sumando malo)

. . . .

$b)$ $V(\mathcal{S}) = \displaystyle\int_0^{\pi/3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{1} \rho^2\sin(\phi)\,d\rho d\theta d\phi + \int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos(\phi)} \rho^2\sin(\phi)\,d\rho d\theta d\phi$

[5 pts] (Cada sumando)

(Dos límites de integración erróneos de cada sumando $=$ sumando malo)

Nota: También puede considerarse como puntaje, en el caso de que no formen las integrales triples pedidas en coordendas rectangulares y esféricas:

- Gráfica tridimensional de las esferas
- Obtener la proyección sobre el plano XY o XZ.
- Obtener la intersección de ambas superficies y deducir que se debe separar en dos subregiones $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$. (En ambos items $a)$ y $b)$)
- Obtener el ángulo + los radios en coordenadas esfericas.

[6 pts] (Como tope máximo, se deja a criterio)